熱伝導の量子論に向けて(1998年度後期 基礎物理学研究所研究会「非平衡非定常ダイナミクスの解明-新しい化学反応論を目指して-」,研究会報告)

武末, 真二

熱伝導の量子論に向けて

京都大学 総合人間学部　武末 真二 [1]

格子熱伝導において成り立つ Fourier 則を、力学的立場から理解しようとする研究の現状について解説する。

1 格子熱伝導の問題

固体中の熱伝導で広く見られる Fourier 則、すなわち熱流が温度勾配に比例するという現象の力学的起源を問うのが、格子熱伝導の問題である。格子力学系を考え、両端に熱浴を取り付けよう。もし、それらの熱浴の温度 (T_L と T_R と表す) が等しければ系は平衡状態に達するが、温度が異なれば 0 でない熱流 $\mathbf{j}$ を伴う非平衡定常状態が実現するであろう。Fourier 則とは、局所的に温度 T が定義され、系の大きさに依らない係数 κ を用いて熱流との間に

$$\mathbf{j} = -\kappa \nabla T \tag{1}$$

という関係が成立することである。また線形応答理論に従えば、この熱伝導率 κ に対して久保公式

$$\kappa = \lim_{t\to\infty} \lim_{V\to\infty} \frac{1}{VdT} \int_0^t \langle \mathbf{J}(t')\mathbf{J}(0) \rangle dt' \tag{2}$$

が成り立つ。ただし、Vは系の体積、d は次元、$\mathbf{J}(t)$ は局所的な熱流 $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ の全格子点に関する和を表す。Fourier 則 (1) が成立するための力学系に対する条件はどのようなものであろうか？ Fourier 則はエネルギーの拡散的振舞を表すから、この問題は不可逆性の力学的起源を問うものでもある。

具体的な系を扱う前に「Fourier 則が成立する」とはどういうことなのか、もう少し詳しく見ておこう。数学的には非平衡定常状態の存在や唯一性 [1] から議論すべきだが、ここではそれらの性質は仮定して、物理的な性質に関して見ていく。

まず場所に依存する温度 T_n (n は熱流方向の位置を表す) が定義できる必要がある。古典系であれば、運動エネルギーの定常状態での平均を用いて

$$T_n = \left\langle \frac{p_n^2}{m_n} \right\rangle \tag{3}$$

により温度を定義することがよく行なわれる。あるいは何らかの局所的物理量の平均値を測定して、これを平衡状態の関係式を用いて温度に読みかえるということも可能だろう。これらの量は系の性質によらず常に存在する。しかし、こうして得られた「温度」が真に温度としての意味を

[1] E-mail:takesue@phys.h.kyoto-u.ac.jp

持つためには、何らかの形で平衡状態の温度とのつながりがなければならない。次に述べる局所平衡の成立という条件は、このつながりを明確にする。

局所平衡とは、局所的に見れば平衡状態に近い状態にあるということであるが、その成立不成立は熱力学極限を取らないとわからない。ハミルトニアンが局所的な関数の和で書ける、すなわち $H=\sum_n H_n$のとき、積分布

$$\rho_{\mathrm{le}}(\omega)=\prod_n e^{-\beta_n H_n(\omega)} \tag{4}$$

が局所平衡を表すように思われる。しかし、この分布を用いて熱流の平均値を計算してみると、(連続時間モデルでは)0 になってしまうことがわかる。熱流もまた局所的な関数なので、局所的な分布が完全に Gibbs 分布に一致してしまえば、平均値も平衡状態での値に一致するしかないからである。したがって、非平衡定常状態ρ_{ss}には必ず上の積分布からのずれが存在する。

$$\rho_{\mathrm{ss}}=\rho_{\mathrm{le}}+\delta\rho \tag{5}$$

有限系を見る限り、このずれのために局所平衡が成立しているかどうかの判定は困難になる。しかし、熱浴の温度 T_L、T_Rを固定して $N\to\infty$ の極限を取れば、ずれの部分は相対的に小さくなると期待される。すなわち、分布に対するノルムが存在して $||\delta\rho||\to 0$。ここではこの条件が局所平衡の成立を表すと考えよう。具体的な系でこのような意味での局所平衡の成立を議論した例は少ない。局所平衡が成立すれば、パラメータβ_nから局所的な温度が定義できる。

Fourier 則が成立するためには、こうして定義された温度が大域的な温度勾配を示すことが必要である。これもまた熱力学極限と関わる問題である。有限系を一つシミュレートしただけでは、そのとき得られる温度勾配が大域的なものかどうかは判定できない。Fourier 則の成立のためには、スケーリング極限

$$T(x)=\lim_{L\to\infty} T_{[Lx]} \tag{6}$$

が非自明ななめらかな勾配を示すことが必要である。ここで L は熱流方向の系の長さ、$0\le x\le 1$ は実数である。具体的なモデルを用いた計算では、有限系で温度勾配が見られるがスケーリング極限では平らになってしまうということがよく起こる。その場合は、$T(n)=\lim_{L\to\infty} T_n$のように系を大きくしたときの端点近傍の振る舞いを見ると、非自明な勾配への収束が見られるのだが、これは Fourier 則とは別の話である。また、Fourier 則が成り立ち熱伝導率が温度の関数 $\kappa=\kappa(T)$ として表されるとき、簡単な計算により

$$\frac{dT}{dx}=\frac{1}{\kappa(T)}\int_{T_L}^{T_R}\kappa(T')dT' \tag{7}$$

となることがわかるので、κに温度依存性があれば、$T(x)$ のグラフは必ずしも直線になる必要はない。

熱伝導率κが温度だけで決まり系の大きさに依らないことも、同じ極限での振舞を調べて初めてわかる性質である。Fourier 則は、T_L、T_Rを固定して L を大きくしたとき、局所的な熱流 $\mathbf{j}$ は $O(L^{-1})$ の量になることを意味するが、定常状態では熱流は一定だから、これは $\lim_{L\to\infty}\sum_n \mathbf{j}_n$ の極限が存在することと同じになる。ここで n は格子点の熱流方向のインデックスを表す。

最後に久保公式の成立に関して、積分の収束性や Fourier 則から求めた熱伝導率との一致が問題になる。以上すべての性質をすべて満たして、はじめて「Fourier 則が成立した」と言えるのである。

我々が問題とすべきことはいくつかに分けられる。まず、上で述べたいろいろな性質の間の関係を明らかにすることである。局所平衡の成立はスケーリング極限での温度勾配の形成を保証するか？熱伝導率の示強性に関してはどうか？といった問題である。次に、力学系の特徴との関係が問題となる。系の次元や、保存則の有無、可積分か非可積分か、エルゴード性や混合性の有無、古典系と量子系の違いなどが、Fourier 則の成立にどのように関係してくるのかを明らかにしたい。ここで忘れてならないのは、熱力学極限での性質を考えているということである。エルゴード性や混合性もこの極限について議論しなければならない。さらに境界条件や熱浴の違い、例えば Langevin 型の確率的熱浴を用いた場合と能勢-Hoover 型の決定論的熱浴を用いた場合の違いといったことも重要である。あるいは系の熱力学的性質、相転移や臨界現象との関係も議論すべきことである。これらの問題に一つ一つ答えていくことにより、Fourier 則を成り立たせている本質的要因が見えてくるだろう。これらについて、以下では具体的に見ていくことにする。

2 古典 1 次元系

格子熱伝導の問題は古くから研究されているが、その多くは古典 1 次元系に関するものである。とくに最近の研究によって、この分野での知見は大いに前進した。まず、そのことについて紹介しよう。

古典 1 次元格子力学系は、相互作用を最隣接格子点間に限定すると、次のハミルトニアンで表される。

$$H = \sum_{n=1}^{N} \frac{p_n^2}{2m_n} + U_n(x_n) + \sum_{n=1}^{N} V(x_{n+1} - x_n) \tag{8}$$

ここで (x_n, p_n) は格子点 n 上の粒子 (以下粒子 n と呼ぶ) の運動を表す正準変数、m_nは粒子 n の質量、$U_n(x_n)$ は on site ポテンシャル、$V(x_{n+1} - x_n)$ は相互作用ポテンシャルを表す。固定境界 $x_0 = x_N = 0$ を採用し、粒子 1 と粒子 Nにそれぞれ温度 T_L、T_Rの熱浴を取り付けると、運動方程式は以下のように書ける。すなわち、$n = 2, \ldots, N-1$ に対しては

$$m_n \ddot{x}_n = F(x_n - x_{n-1}) - F(x_{n+1} - x_n) - U'(x_n) \tag{9}$$

ただしここで $F(z) = -V'(z)$ である。また、$n = 1, N$に対しては

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= F(x_1 - x_0) - F(x_2 - x_1) - U_1'(x_1) - m_1\gamma_1 \dot{x}_1 + \xi_1(t) && (10) \\ m_N \ddot{x}_N &= F(x_N - x_{N-1}) - F(x_{N+1} - x_N) - U_N'(x_N) - m_N\gamma_N \dot{x}_N + \xi_N(t) && (11) \end{aligned}$$

ここで熱浴は Langevin 方程式で表した。$\xi_i(t)$ $(i = 1, N)$ は相関

$$\langle \xi_i(t)\xi_j(t')\rangle = 2\gamma_i m_i k_B T_i \delta_{ij}\delta(t-t') \tag{12}$$

を持つガウス型白色雑音である。$(T_1 = T_L, T_N = T_R)$

局所的な熱流は、以下のようにエネルギーに関する連続の式を用いて定義される。ハミルトニアン H を次のように分解しよう。

$$H = \sum_{n=1}^{N} H_n + \frac{1}{2}[V(x_{n+1} - x_n) + V(x_1 - x_0)] \tag{13}$$

$$H_n = \frac{p_n^2}{2m_n} + \frac{1}{2}[V(x_{n+1} - x_n) + V(x_n - x_{n-1})] + U_n(x_n) \tag{14}$$

H_nは局所的なエネルギーを表すと解釈でき、相互作用が最隣接格子点間にのみ働くことから $2 < n < N-1$ のとき次式が成立する。

$$\frac{dH_n}{dt} = \{H_n, H\} = \{H_n, H_{n-1} + H_{n+1}\} = \{H_n, H_{n-1}\} - \{H_{n+1}, H_n\} \tag{15}$$

ここで $\{\}$ は Poisson 括弧を表す。したがって $j_{n|n+1} = \{H_{n+1}, H_n\}$ とおくと

$$\frac{dH_n}{dt} = j_{n-1|n} - j_{n|n+1} \tag{16}$$

となって、右辺は空間差分で書けているので上式を連続の式とみなすことができる。すなわち $j_{n|n+1}$ が格子点 n から $n+1$ への熱流を表す。以上の議論は、Poisson 括弧を交換子で置き換えれば、量子系に対しても適用できる。式 (14) を用いて具体的に計算すると

$$j_{n|n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{p_n}{m_n} + \frac{p_{n+1}}{m_{n+1}}\right) F(x_{n+1} - x_n) = \frac{1}{2}(\dot{x}_n + \dot{x}_{n+1}) F(x_{n+1} - x_n) \tag{17}$$

を得る。局所的なエネルギーの定義に関してはある程度任意性があり、それに応じて熱流の関数形も変わることを注意しておこう。

調和格子の場合には、Rieder らによって解析的に非平衡定常状態を求めることが行われている [2]。式 (8) でいえば $U_n = 0$, $m_n = 1$, $V(x) = bx^2/2$ の場合である。このとき p_n^2 の平均値を局所温度と読み替えると、両端のごく近傍を除いて温度勾配は形成されず、局所的熱流の平均値は温度勾配ではなく両端の熱浴の温度差に比例し、系の大きさには依らないという結果が得られる。すなわち Fourier 則は成立しない。

その後、m_nの値をランダムにするなどの試みが行われたが、ランダム性だけでは Fourier 則を示すことはできなかった。計算機の発達に伴って非線形性を入れた系のシミュレーションも盛んに行われたが、問題とする性質が熱力学極限での性質であることもあって、初期の計算では Fourier 則の成立を示す系を見出すことは困難であった。(この間の事情については [3, 4] を参照のこと) ようやく数値計算で Fourier 則が見えるようになるのは 80 年代以降のことである。

ここで数値計算でよく用いられる代表的な系をいくつか挙げておこう。

(i) Fermi-Pasta-Ulam (FPU) モデル [5, 6, 7, 8]

$$V(z) = \frac{kz^2}{2} + \frac{\alpha z^3}{3} + \frac{\beta z^4}{4}, \quad U_n(z) = 0 \tag{18}$$

(ii) Diatomic Toda モデル [9, 10, 11]

$$V(z) = az + \frac{a}{b}e^{-bz}, \quad U_n(z) = 0$$

$$m_n = \begin{cases} m_1 & (\text{for} \quad n = \text{odd}) \\ m_2 & (\text{for} \quad n = \text{even}) \end{cases}$$

(iii) Ding-a-ling モデル [12, 13]

$$U_n(z) = \begin{cases} \frac{kz^2}{2} & (\text{for} \quad n = \text{even}) \\ 0 & (\text{for} \quad n = \text{odd}) \end{cases} , \qquad V(z) = \text{hard core}$$

(iv) Ding-dong モデル [14]

$$U_n(z) = \frac{kz^2}{2}, \quad V(z) = \text{hard core}$$

80 年代に突破口を開いたのは Mokross と Büttner による研究 [13] であり、通常の戸田格子では温度勾配が生じないのに対して、1 個おきに質量を変えた diatomic 戸田モデルでは温度勾配ができ、Fourier 則が成り立つように見えるという数値計算の結果が報告された。戸田格子は可積分であるが、diatomic にすると非可積分になる。ここに非可積分性が必要であることが認識された。Casati ら [12] は Ding-a-ling モデルを用いた数値計算の結果から、系が十分カオス的であり K 系と呼ばれるものになっている場合に Fourier 則が成り立つと主張した。これらの計算では比較的系の大きさが小さく、後に Jackson ら [10] や Mimnagh ら [13] の研究で、まだ完全な収束には達していなかったことが示されたが、Fourier 則が成り立つことは確認された。90 年代には FPU[5] や ding-dong モデル [14] でも Fourier 則が成り立っていることが報告された。また Hamilton 系ではないが、セルオートマトンを用いた系でも同様の現象が起こることが、Creutz[15] や筆者 [16] により示された。このことは連続性や Hamilton 系のシンプレクティック条件は、Fourier 則にとって本質的ではなく、加法的保存量を持つ保存系であれば同様の現象が起こりうることを意味している。以上のような研究から、非可積分性のために系が十分カオス的であり、かつ系の大きさが十分大きければ、Fourier 則は成立するであろうというのがつい最近までの認識であったと思われる。

これに対して最近の進展をもたらしたのは、Lepri らによる研究 [6, 7, 8] である。彼らは FPU-β モデル、すなわち式 (18) において $\alpha = 0$ としたものに対し、能勢-Hoover 型の熱浴を用いて数値計算を行なった。(その他のパラメータは $m_n = 1, \beta = 0.1$ である。) 能勢-Hoover 型の熱浴とは、式 (10)、(11) の代わりに

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -\zeta_L \dot{x}_1 + F(x_1 - x_0) - F(x_2 - x_1) && (19) \\ \ddot{x}_N &= -\zeta_R \dot{x}_N + F(x_N - x_{N-1}) - F(x_{N+1} - x_N) && (20) \\ \dot{\zeta}_L &= \frac{1}{\Theta} \left(\frac{\dot{x}_1^2}{T_L} - 1 \right) && (21) \\ \dot{\zeta}_R &= \frac{1}{\Theta} \left(\frac{\dot{x}_N^2}{T_R} - 1 \right) && (22) \end{aligned}$$

(Θは定数) としたものである。$T_L = T_R$であれば、Gibbs 分布が不変であることを示せるので、熱浴としての最低要件は満たしている。彼らはこの系では、温度勾配のスケーリング極限は存在するが、熱伝導率は系の大きさ N に対して $N^{1-\alpha}$、$\alpha \simeq 0.62$ の依存性を示すことを見出した。したがって Fourier 則は破れている。この結果は一見 Kaburaki らの結果 [5] と矛盾するようだが、実は Kaburaki らの結果も、整理の仕方を変えれば熱伝導率が N のベキで増えることを示している

ことをLepriらは議論している。[5]ではLangevin型の熱浴が用いられており、このことはLepriらの結果が熱浴の特殊性によるものではないことを示している。

ではこのN依存性の原因は何であろうか？熱流の時間空間相関$\langle j_n(t)j_0(0)\rangle$を見ると、一定速度$v_p$で伝播する部分があるので、有限系の性質を排除するために久保公式の積分の上限をN/v_pと置き換えることができる。したがって、$\kappa \propto N^{1-\alpha}$は$C_J(t)=\sum_n\langle j_n(t)j_0(0)\rangle \propto t^{-\alpha}$のように熱流の相関がlong-time tailを示すことと等価である。Lepriらは長波長モードの緩和をモード結合理論を用いて求め、運動量保存則のためにこのようなlong-time tailが生じることを導いている。(文献[17]も参照のこと。)

運動量保存則は、ハミルトニアン(8)で$U_n(x_n)$の項が存在しない場合には一般的に成り立つ。固体のモデルとしてはもちろんその方が自然である。前に挙げたモデル群の中ではFPUとDiatomic Todaがこれに相当するが、Jacksonらの計算によると後者ではFourier則が実現するとされた。しかしこれも最近、波多野によって計算がやり直され、FPUと同様にlong-time tailのために$\kappa \propto N^{0.35}$となり、Fourier則は破れていることが示された[11]。Huらも別のモデルを用いて、同様の結果を導いている[18]。

以上から、1次元古典系の熱伝導に関する現在の理解は、次のようにまとめることができるだろう。Fourier則が成り立つためには、系が非可積分であって十分カオス的であることが必要である。ただし、それに関する定量的な条件は知られていない。On-siteポテンシャルU_nがあるような系では、十分大きな系ではκが系の大きさに依らなくなり、Fourier則が成立する。しかし、相互作用ポテンシャルしか存在しない系では運動量保存則のためにlong-time tailが生じ、その結果熱伝導率が発散する。高次元の系ではどうなるかというと、Long-time tailの指数は系の次元dに依存し、$d=3$では運動量保存則があっても久保公式の積分が収束することが期待される。

3 量子混合性

熱伝導の問題では、熱力学極限での系の性質が問題になる。当然力学系のエルゴード性や混合性といった性質も、その極限で考えなければならない。非可積分性という条件がFourier則の成立にとって重要であることが、1次元古典系の研究からわかったが、一般に非可積分性とエルゴード性や混合性はどのような関係にあるだろうか？可積分ではないが、熱力学極限でエルゴード的(もしくは混合的)でないというような系が存在するだろうか？これは古典系においても重要な問題であるが、ここではProsenによる量子系を用いた研究[19]について紹介しよう。

量子混合性を任意の物理量の時間相関

$$C_{AB}(\tau)=\lim_{L\to\infty}\langle A(\tau)B(0)\rangle^L-\langle A\rangle^L\langle B\rangle^L \tag{23}$$

が$\tau\to\infty$で消えること($\lim_{\tau\to\infty}C_{AB}(\tau)=0$)と定義しよう[20]。ここに$\langle\rangle^L$は大きさ$L$の系でのアンサンブル平均を表す。

Prosenはkicked t-V (KtV)モデル

$$H(\tau)=\sum_{j=0}^{L-1}\left[-\frac{t}{2}(c_j^\dagger c_{j+1}+c_{j+1}^\dagger c_j)+Vc_j^\dagger c_j c_{j+1}^\dagger c_{j+1}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(\tau-m)\right] \tag{24}$$

($c_j^\dagger$、c_j はフェルミオンの生成消滅演算子を表す) を用いて、粒子の流れ

$$J = \frac{i}{2}\sum_{j=0}^{L-1}(c_j^\dagger c_{j+1} - c_{j+1}^\dagger c_j) \tag{25}$$

の自己相関関数を数値的に計算した。より具体的には、まず粒子密度 $\rho = N/L$ (Nは粒子数) を一定にして系の大きさ L を変え、$C_J^L = \frac{1}{L}\langle J(0)J(m)\rangle^L$ を計算する。これより $L\to\infty$ での値 $C_J(m)$ を求め、その時刻 m に対する依存性を調べた。ところで、KtV は以下の 3 通りの場合に可積分となることが分かっている。

- 1.$t = 0$
- 2.$V = 0 \pmod{2\pi}$
- 3.$\Delta = t/V =$finite として $tV \to \infty$

そこで Prosen は $t = V = 1$ と $t = V = 4$ の 2 通りの場合について計算を行い、後者の場合は $C_J(m) \propto \exp(-\lambda_J m)$ のように指数関数的に減少するが、前者の場合は $C_J(m)/rightarrow$ finite となることを見出した。したがって、どちらの場合も非可積分であるが、前者では混合性は成り立っていないことになる。

粒子の流れの自己相関は Drude 重みと呼ばれる量と結びついている。電気伝導度の実部 σ' を

$$\sigma'(\omega) = 2\pi D\delta(\omega) + \sigma_{\mathrm{reg}}(\omega) \tag{26}$$

と書いたときの D が Drude 重みと呼ばれる量 [21] であるが、これは $C_J^L(m)$ の積分

$$D_J = \lim_{T\to\infty}\lim_{L\to\infty}\frac{1}{2TL}\int_{-T}^{T} C_J^L(\tau)d\tau \tag{27}$$

により $D = \beta D_J$ と表されるのである。(βは逆温度。) Drude 重みが 0 でないときは、弾道的な輸送を行う理想導体を表し、$D = 0$ の場合には通常のオームの法則の法則に従う。ちょうど Fourier 則の成立、不成立に対応することが D によって分類できることになる。Prosen の結果は $t = V = 1$ の場合は $D \neq 0$ だが $t = V = 4$ の場合は $D = 0$ ということを示し、この間で転移が起こることになる。これが正しい結果なのかどうか、さらなる検証が待たれるところである。

1 次元系の Drude 重みは最近盛んに研究されており、可積分系では Bethe 仮説による計算により $D(\beta) \neq 0$ となるようである [22, 23]。また、非可積分の場合でも $D(\beta) \neq 0$ となるという量子モンテカルロの結果も報告されている [24]。

1 次元古典系では運動量保存則と熱伝導率の発散に関係があったが、Drude 重みと保存量に対しても、一般的な関係である Mazur-鈴木の不等式 [25]

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \langle A(t)A(0)\rangle dt \geq \sum_n \frac{\langle AQ_n\rangle^2}{\langle Q_n^2\rangle} \tag{28}$$

(Q_n は $\langle Q_nQ_m\rangle = \langle Q_n^2\rangle\delta_{mn}$ を満たす保存量を表す。) を用いて、

$$D \geq \frac{\beta}{2L}\sum_n frac\langle JQ_n\rangle^2\langle Q_n^2\rangle \tag{29}$$

という関係を導くことができる [26]。したがって、右辺が有限になるような保存量が 1 個でも存在すれば、Dは有限、よって系は混合性を示さないということになる。

4　おわりに

題目に相反して古典系の話題が主となってしまったが、熱伝導を力学の立場から理解しようとする試みについて解説を行った。量子系に関する理論やシミュレーションはまだ数が少なく、これからの分野であると思う。解析的な結果は古典系と同様、調和格子の場合しか得られておらず、結果もほとんど同じになる [27]。シミュレーションが少ないのは、熱伝導では熱力学極限の性質を見なければならないのに、量子系で系の大きさを大きくすることは指数間数的な困難を伴うからである。それでもスピン系を用いた我々の計算によれば、可積分系の場合には温度勾配が現れないのに、非可積分系では勾配が形成される可能性があるといった、古典系と類似の性質が得られている [28]。新しい手法が開発され、今後さらに発展することを期待したい。

参考文献

[1] J. P. Eckmann, A. Pillet, and L. Rey-Bellet, Commun. Math. Phys. **201**, 657–697 (1999).

[2] Z. Rieder, J. L. Lebowitz, and E. Lieb, J. Math. Phys. **8**, 1073 (1967).

[3] W. M. Visscher, in *Methods in Computational Physics* Vol. 15 (Academmic Press, New York, 1976).

[4] E. A. Jackson, Roky Mountain J. of Math. **8**, 127 (1978).

[5] H. Kaburaki and M. Machida, Phys. Lett. A **181**, 85–90 (1993).

[6] S. Lepri, R. Livi, and A. Politi, Phys. Rev. Lett. **78**, 1896 (1997).

[7] S. Lepri, R. Livi, and A. Politi, Europhys. Lett. **43**, 271–276 (1998).

[8] S. Lepri, R. Livi, and A. Politi, Physica D **119**, 140 (1998).

[9] F. Mokross and H. Büttner, J. Phys. C **16**, 4539–4546 (1983).

[10] E. A. Jackson and A. Mistriotis, J. Phys.:Condens. Matter **1**, 1223–1238 (1989).

[11] T. Hatano, Phys. Rev. E **59**, R1 (1999).

[12] G. Casati, J. Ford, F. Vivaldi, and W. M. Visscher, Phys. Rev. Lett. **52**, 1861–1864 (1984).

[13] D. J. R. Mimnagh and L. E. Ballentine, Phys. Rev. E **56**, 5332–5342 (1997).

[14] Tomaž Prosen and Marko Robnik, J. Phys. A **25**, 3449–3472 (1992).

[15] M. Creutz, Ann. Phys. **167**, 62 (1985).

[16] S. Takesue, Phys. Rev. Lett. **64**, 252 (1990).

[17] S. Lepri, Phys. Rev. E **58**, 7165 (1998).

[18] Bambi Hu, Baowen Li, and Hong Zhao, Phys. Rev. E **57**, 2992 (1998).

[19] Tomaž Prosen, Phys. Rev. Lett. **80**, 1808–1811, (1998); and cond-mat/9808150.

[20] G. Jona-Lasinio and C. Presilla, Phys. Rev. Lett. **77**, 4322 (1996).

[21] W. Kohn, Phys. Rev. **133**, A171 (1964).

[22] H. Castella, X. Zotos, and P. Prelovšek, Phys. Rev. Lett. **74**, 972–975 (1995); X. Zotos and P. Prelovšek, Phys. Rev. E **53**, 983-986 (1996); H. Castella and X. Zotos, Phys. Rev. B **54**, 4375–4378 (1996).

[23] S. Fujimoto and N. Kawakami, J. Phys. A **31**, 465–474 (1998).

[24] S. Kirchner, H. G. Evertz, and W. Hanke, cond-mat/9804148.

[25] P. Mazur, Physica **43**, 533 (1969); M. Suzuki, Physica **51**, 277 (1971).

[26] X. Zotos, F. Naef, and P. Prolovšek, Phys. Rev. B **55**, 11029 (1997).

[27] U. Zürcher and P. Talkner, Phys. Rev. A **42**, 3267–3290 (1990).

[28] K. Saito, S. Takesue, and S. Miyashita, Phys. Rev. E **54**, 2404 (1996).